EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

41e JAARGANG 1965/1966

IX—1 JUNI 1966

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

HOEKEN [1])

door

DR. P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Bij de behandeling van hoeken en het rekenen ermee lopen we bij ons onderwijs over talrijke moeilijkheden heen. Dit is begrijpelijk, maar toch kan het nuttig zijn ons te realiseren, waarover we nu eigenlijk zo gemakkelijk heenlopen.

De definitie baart ons, aanvankelijk althans, weinig zorgen. Een hoek is een figuur, die bestaat uit twee halve lijnen met hetzelfde uiteinde. Op intuïtieve gronden wordt nu gelijkheid van hoeken ter sprake gebracht, groter en kleiner, optellen van hoeken en vermenigvuldigen van een hoek met een reëel getal. De grootst mogelijke hoek is de gestrekte, zodat de optelling en de vermenigvuldiging niet altijd uitvoerbaar zijn. We kunnen hoeken van 60° en 130° niet optellen en evenmin een hoek van 130° met 2 vermenigvuldigen.

Sommigen definiëren een hoek als een deel van het platte vlak begrensd door twee halve lijnen met hetzelfde uiteinde. Dit kan technisch wel eens voordelen hebben. Zo geldt dan de stelling, dat de som van de hoeken van een vierhoek 360° is, ook voor vierhoeken met een hoek, die „groter dan 180°" is, en is de stelling, die zegt, dat een boog van een cirkel gelijk is aan de middelpuntshoek, die erop staat, algemeen juist. Maar principieel is er niets veranderd.

Wat in dit stadium te wensen overblijft, is dus een verantwoorde fundering van datgene, wat totnogtoe alleen een intuïtief fundament heeft verkregen. Gezien het voorlopige karakter van de bovengenoemde hoekdefinitie zullen we ons aan een dergelijke verbetering nog niet wagen. Zodra we immers met de goniometrie beginnen, krijgt het begrip hoek een ander aspect. We onderscheiden aan een hoek een eerste en een tweede been en denken ons de hoek als het resultaat van een draaiing, waarbij het eerste been om het uiteinde op de een of andere manier rondgewenteld is, totdat het tot rust gekomen de stand van het tweede been bleek te hebben gekregen. Dit draaien kan in beide richtingen gebeuren en bovendien kan men

[1]) Voordracht gehouden op 4 januari 1965 te Nijmegen voor het Wiskundig Genootschap.

net zo vaak om het hoekpunt heendraaien, als men maar wil. Ten slotte moet nog afgesproken worden, welke draairichting we de positieve wensen te noemen. En na al deze voorbereidingen zijn we dan in staat te spreken van hoeken, waarvan de grootte elk reëel getal kan zijn. De situatie is nu aanmerkelijk verslechterd. Begrepen we vroeger nog, wat een hoek is, dit inzicht wordt ons nu ten enenmale ontnomen. In de definitie van een hoek is een element geslopen, het ronddraaien en nog wel een willekeurig aantal malen, dat essentieel onwiskundig is en appelleert aan mechanische gebeurtenissen. Ik wil hiermee helemaal niet zeggen, dat ons onderwijs dus verkeerd is. Natuurlijk moet onze didactiek niet erop gericht zijn universiteitje op de middelbare school te spelen. Maar het is wel gewenst, dat we ons rekenschap ervan geven, hoe een mathematisch zuivere behandeling zou zijn. We kunnen dan alsnog bepalen, of hiervan iets of niets realiseerbaar is. Eerst ons bezinnen op wat goed is en dan noodgedwongen zondigen is een hele vooruitgang vergeleken bij alleen maar domweg zondigen.

We beperken ons tot hoeken met hetzelfde hoekpunt. We gaan voorlopig uit van de reeds gegeven definitie: een hoek is een figuur, die bestaat uit twee halve lijnen met hetzelfde uiteinde. De eerste vraag, die we willen trachten te beantwoorden, is: wanneer noemen we twee hoeken gelijk? We onderstellen, dat $\angle (l_1, l_2)$ en $\angle (m_1, m_2)$ twee hoeken zijn met hetzelfde hoekpunt O. Het ligt nu voor de hand te definiëren: $\angle (l_1, l_2) = \angle (m_1, m_2)$ wil zeggen, dat bij de draaiing om O, waarbij l_2 het beeld van l_1 is, ook m_2 het beeld van m_1 is. Allereerst merken we op, dat bij deze definitie blijkbaar verondersteld is, dat een hoek niet slechts een paar halve lijnen is, maar een geordend paar. Immers als volgens deze definitie $\angle (l_1, l_2) = \angle (m_1, m_2)$ zou zijn, dan is in het algemeen niet $\angle (l_1, l_2) = \angle (m_2, m_1)$. In het licht van de „goniometrische" definitie van de hoek kan dit alleen maar als een vooruitgang worden aangemerkt. Er blijft nog over vast te leggen, wat onder een draaiing wordt verstaan. Men is geneigd te zeggen: een draaiing om O is een transformatie, waarbij P als beeld heeft een punt P', waarvoor geldt $OP' = OP$ en waarvoor verder voor elk paar punten P en Q geldt $\angle POP' = \angle QOQ'$. Waarmee we in een evidente vicieuze cirkel verzeild zijn geraakt.

Ons volgende programmapunt zal dus zijn het geven van een definitie van een rotatie om O, waarin gelijkheid van hoeken geen rol speelt. Een rotatie om O zal in elk geval zijn een isometrische transformatie, die O als invariant punt heeft. D.w.z. een transformatie, waarbij voor elk paar punten geldt $P'Q' = PQ$ en waar-

voor $O' = O$. Om tot een definitie van een rotatie te komen, onderzoeken we daarom eerst deze isometrische transformaties.

Blijkbaar hebben we verondersteld, dat onze ruimte een metrische ruimte is. Laten we, om onze redenering concreet te maken, uitgaan van de ruimte van geordende reële getallenparen. Met een punt bedoelen we dus een geordend paar reële getallen (x, y). De ruimte is metrisch; er is dus een afstand gedefinieerd. Onder de afstand van de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) verstaan we

$$\mathrm{d} = \sqrt{\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}}\ ^{1)}.$$

Onder een rechte lijn verstaan we een verzameling punten, die voldoen aan een eerste-graads vergelijking $ax + by + c = 0$. We bewijzen nu gemakkelijk, dat drie punten P_1, P_2, P_3 collineair zijn, als één van de betrekkingen $\mathrm{d}(P_i, P_j) = \mathrm{d}(P_i, P_k) + \mathrm{d}(P_j, P_k)$ geldt, terwijl ingeval ze niet collineair zijn de drie betrekkingen $\mathrm{d}(P_i, P_j) < \mathrm{d}(P_i, P_k) + \mathrm{d}(P_j, P_k)$ gelden $(i, j, k = 1, 2, 3)$. Omdat het al of niet collineair zijn zo teruggebracht is tot het gelden van bepaalde betrekkingen tussen afstanden, zal bij een isometrische transformatie het beeld van een rechte lijn weer een rechte lijn zijn.

Onderstel nu, dat

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y)$$

een isometrische transformatie is. Dan is dus

$$af(x, y) + bg(x, y) + c = 0$$

voor elke a, b en c een lineaire vergelijking. Het linker lid is dan een lineaire functie van x en y voor elke a, b en c. Door $a = 0$ te kiezen zien we, dat $g(x, y)$ een lineaire functie is, en evenzo $f(x, y)$. We kunnen elke isometrische transformatie dus schrijven in de vorm

$$\begin{aligned} x' &= px + qy + t \\ y' &= rx + sy + u. \end{aligned}$$

We nemen nu aan, dat de isometrische transformatie een invariant punt heeft en dat dit het punt $O = (0, 0)$ is. Voorwaarde hiervoor is $t = u = 0$, zodat onze transformatie wordt

$$\begin{aligned} x' &= px + qy \\ y' &= rx + sy. \end{aligned} \qquad (1)$$

---

[1]) Sommigen zullen misschien menen, dat we uitgegaan zijn van cartesiaanse coördinaten en dus reeds bekendheid met de rechte hoek gepostuleerd hebben. Dit is niet het geval. Als men naleest, wat ondersteld is, zal dit duidelijk worden. Wel zou het mogelijk zijn met behulp van hetgeen van onze ruimte gegeven is, loodrechte stand van lijnen te definiëren. Maar dat wil alleen zeggen, dat deze te definiëren is zonder eerst een hoekmaat in te voeren.

We weten nu, dat elke isometrische transformatie met O als invariant punt deze gedaante heeft. Het omgekeerde geldt echter niet. Dus gaan we onderzoeken aan welke voorwaarde de coëfficiënten moeten voldoen om de afstand invariant te laten.

Kies de drie punten $O = (0, 0)$, $P = (1, 0)$, $Q = (0,1)$. Nu moet
a. $OP = O'P'$; dit levert $p^2 + r^2 = 1$,
b. $OQ = O'Q'$; dit levert $q^2 + s^2 = 1$,
c. $PQ = P'Q'$; dit levert $(p - q)^2 + (r - s)^2 = 2$ en dus in verband met de voorgaande twee betrekkingen $pq + rs = 0$.
Omgekeerd verifieert men zonder moeite, dat de afstand invariant is, als aan deze drie betrekkingen voldaan is.

Dus: de isometrische transformaties, die O invariant laten, zijn de transformaties van de vorm (1), waarin

$$\begin{aligned} p^2 + r^2 &= 1 \\ q^2 + s^2 &= 1 \\ pq + rs &= 0. \end{aligned}$$

Stel $s \neq 0$ en $s = ap$. Dan is $q = -ar$, $a^2r^2 + a^2p^2 = 1$ en dus $a = \pm 1$. De transformatie luidt dan

$$\begin{aligned} x' &= px \mp ry \\ y' &= rx \pm py. \end{aligned} \tag{2}$$

Als $s = 0$, dan is $p = 0$, $r = \pm 1$, $q = \pm 1$ (vier mogelijkheden), en heeft de transformatie dus ook de gedaante (2).

We vinden blijkbaar twee soorten transformaties:

$$\begin{aligned} x' &= px - ry \\ y' &= rx + py \end{aligned} \quad (p^2 + r^2 = 1) \tag{3}$$

en

$$\begin{aligned} x' &= px + ry \\ y' &= rx - py \end{aligned} \quad (p^2 + r^2 = 1). \tag{4}$$

Nader onderzoek leert, dat de transformaties van de soort (3) een groep vormen, die van de soort (4) niet. Wel vormen de transformaties van de soort (3) en (4) samen een groep. De soort (3) is daarvan een ondergroep en wel een normale deler met (4) als nevenklasse.

De transformaties van de soort (3) noemen we rotaties. Elke transformatie van de soort (4) is te schrijven als het produkt van de spiegeling $y' = -y$ en een rotatie.

We noemen de coëfficiënten p en r in (3) resp. de cosinus en de

sinus van de rotatie. Noemen we de rotatie ρ, dan schrijven we

$$p = \cos\rho \text{ en } r = \sin\rho.$$

We bewijzen nu: als l_1 en l_2 twee halve lijnen zijn met eindpunt O, dan is er één rotatie, waarbij l_2 het beeld van l_1 is.

Bewijs. Op l_1 ligt één punt, dat een afstand 1 tot O heeft. Noem dit punt (p_1, r_1). Op l_2 ligt analoog één punt (p_2, r_2) op afstand 1 van O. Er zijn nu rotaties ρ_1 en ρ_2, waarvoor geldt

$$p_1 = \cos\rho_1 \text{ en } r_1 = \sin\rho_1,$$
$$p_2 = \cos\rho_2 \text{ en } r_2 = \sin\rho_2.$$

Men ziet gemakkelijk in, dat de rotatie $\rho_2 \circ \rho_1^{-1}$ (waarbij dus eerst de inverse van ρ_1 en daarna ρ_2 uitgevoerd wordt) het punt (p_1, r_1) eerst in $(1, 0)$ en daarna in (p_2, r_2) overvoert. Dan wordt de halve lijn l_1 ook in l_2 overgevoerd.

De uniciteit van de oplossing volgt daaruit, dat de enige rotatie, die een van O verschillend punt invariant laat, de identiteit is. [1])

Nu we deze stelling bewezen hebben, kunnen we de gelijkheid van hoeken met hoekpunt O definiëren. We noemen $\angle\,(l_1, l_2)$ en $\angle\,(m_1, m_2)$ gelijk, als bij de rotatie, waarbij l_2 beeld van l_1 is, m_2 het beeld is van m_1.

De optelling van hoeken baseren we nu op het samenstellen van rotaties. We gaan uit van twee rotaties

$$\rho_1\colon \begin{aligned} x' &= p_1x - r_1y \\ y' &= r_1x + p_1y \end{aligned} \quad \text{en} \quad \rho_2\colon \begin{aligned} x' &= p_2x - r_2y \\ y' &= r_2x + p_2y \end{aligned}$$

en beschouwen de rotatie $\rho_2 \circ \rho_1$. Hiervoor geldt:

$$\begin{aligned} x' &= (p_1p_2 - r_1r_2)x - (p_1r_2 + p_2r_1)y \\ y' &= (p_1r_2 + p_2r_1)x + (p_1p_2 - r_1r_2)y. \end{aligned}$$

Hieruit volgen de formules:

$$\begin{aligned} \cos(\rho_2 \circ \rho_1) &= \cos\rho_1 \cos\rho_2 - \sin\rho_1 \sin\rho_2, \\ \sin(\rho_2 \circ \rho_1) &= \sin\rho_1 \cos\rho_2 + \sin\rho_2 \cos\rho_1. \end{aligned}$$

We noemen nu $\angle\,(n_1, n_2)$ de som van $\angle\,(l_1, l_2)$ en $\angle\,(m_1, m_2)$, als l_2 het beeld is van l_1 bij een rotatie ρ_1, m_2 het beeld van m_1 bij een rotatie ρ_2 en n_2 het beeld van n_1 is bij de rotatie $\rho_2 \circ \rho_1$.

Uit het voorgaande volgt, dat de som van elk paar hoeken weer een hoek is. Uit de formules blijkt verder, dat de optelling commutatief is.

---

[1]) Om deze uniciteit te bereiken, hebben we ons moeten beperken tot de groep (3).

Op geheel analoge wijze kan men het tegengestelde van een hoek definiëren met behulp van het verband tussen ρ en ρ^{-1} en het verschil van twee hoeken in verband brengen met $\rho_2 \circ \rho_1^{-1}$. Formules voor de bijbehorende cosinussen en sinussen zijn zonder moeite op te stellen.

De hoeken met vast hoekpunt vormen dus een groep t.o.v. de optelling. De bij deze groep behorende goniometrische formules zijn hierboven afgeleid. Omdat de verzameling van de rotaties met operatie $\circ$ isomorf is met de verzameling van de ekwivalentieklassen van gelijke hoeken met operatie $+$, kunnen we de cosinus en de sinus van een rotatie per definitie ook de cosinus resp. sinus van de bijbehorende ekwivalentieklasse van gelijke hoeken noemen. En ook kunnen we de cosinus en de sinus van een hoek per definitie gelijkstellen aan de cosinus resp. sinus van de ekwivalentieklasse van gelijke hoeken, waartoe hij behoort. Doen we dit, dan hebben we daarmee de gebruikelijke goniometrische formules verkregen.

Laten we ons nu eerst realiseren, wat we met het bovenstaande nog niet bereikt hebben. We hebben de „grootte" van een hoek nog niet in een getal uitgedrukt. Omdat we hoeken kunnen optellen en het tegengestelde van een hoek kunnen nemen, kunnen we een hoek met een willekeurig geheel getal vermenigvuldigen. Maar daar blijft het dan ook bij; vermenigvuldiging van een hoek met een niet-geheel getal is niet gedefinieerd. Groter en kleiner zijn t.a.v. hoeken niet gedefinieerd. Daarmee gepaard gaat, dat in de verzameling van de hoeken met hoekpunt O geen omgeving van een hoek gedefinieerd is en dat dus deze verzameling niet een topologische ruimte is. En daarvan is weer een gevolg, dat we niet alleen niet kunnen bewijzen, dat sin α en cos α continue functies van de hoek α zijn, maar dat deze uitspraak zelfs van zin ontbloot is.

Ons eerstvolgende programmapunt zal zijn een hoek „in een getal uit te drukken". We bedoelen hiermee: aan elke hoek een reëel getal toevoegen en dan natuurlijk op zodanige wijze, dat als aan de hoeken α en β de getallen a en b toegevoegd worden, aan de hoek $\alpha + \beta$ het getal $a + b$ wordt toegevoegd.

In deze vorm is het programma onuitvoerbaar. Kies namelijk als hoek α de hoek tussen de halve lijn $x \geqq 0$, $y = 0$ (de positieve x-as) en de halve lijn $y \geqq 0$, $x = 0$ (de positieve y-as), dan is met behulp van de transformatieformules (3) voor de rotatie gemakkelijk verifieerbaar, dat $5\alpha = \alpha$. Voeg aan deze hoek het getal a toe: a moet dan voldoen aan

$$a + a + a + a + a = a.$$

Waaruit volgt $a = 0$. Dit is weliswaar op zichzelf nog niet zinledig, maar leidt tot onbruikbare consequenties. Aan elke hoek, die, wat wij noemen, gelijk is aan een rationaal aantal malen 2π, zou het getal 0 op deze wijze toegevoegd moeten worden. Een dergelijke toevoeging levert geen basis voor de ordening van de hoeken en voor vermenigvuldiging van een hoek met een reëel getal.

Een mogelijk remedie is op het eerste gezicht: voeg niet aan elke hoek een reëel getal toe, maar een reëel getal mod 2π. Dan heeft de vergelijking

$$a + a + a + a + a = a$$

als wortel o.a. $\frac{1}{2}\pi$ (mod 2π). Er is nu wel van enige verbetering sprake, maar als we straks een hoek α met b.v. $\frac{1}{2}$ willen vermenigvuldigen, komen we in moeilijkheden. Er zijn twee hoeken, waarvan het dubbele gelijk aan een gegeven hoek α is; het verschil van deze twee hoeken is π. De vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ geeft dus geen ondubbelzinnig bepaald resultaat, zodat op zijn minst extra voorzorgsmaatregelen noodzakelijk worden. Erger wordt het nog, als we willen oplossen de vergelijking $\cos \frac{1}{2}\varphi = -1$. We zijn gewoon te vinden $\varphi = 2\pi$ (mod 4π). Waaruit we dan zouden moeten concluderen, dat deze vergelijking vals is, immers aan hoeken zijn alleen getallen mod 2π toegevoegd.

De oorzaak van de narigheid is, dat we op de verkeerde weg zijn. We moeten niet trachten aan hoeken getallen toe te voegen, maar juist omgekeerd, aan getallen hoeken toe te voegen. We stellen het probleem opnieuw. Gevraagd wordt aan de reële getallen hoeken toe te voegen, zo, dat als aan de getallen a en b de hoeken α en β toegevoegd worden, aan het getal $a + b$ de hoek $\alpha + \beta$ toegevoegd wordt. Moderner uitgedrukt: gevraagd een homomorfe afbeelding van de verzameling van de reële getallen op de verzameling van de hoeken te ontwerpen, die de optelling invariant laat.

We merken eerst op, dat elke hoek met hoekpunt O gelijk is aan een hoek, waarvan het eerste been de positieve x-as is. We kunnen dus volstaan met aan elk reëel getal een hoek toe te voegen met als eerste been de positieve x-as. Het is duidelijk, dat we aan het getal 0 die hoek moeten toevoegen, die correspondeert met de identieke transformatie, d.i. de hoek, waarvan het tweede been ook de positieve x-as is. Verder kiezen we willekeurig een andere hoek en voegen daaraan het getal 1 toe. Voor deze hoek kiezen we de hoek, waarvan het tweede been de positieve y-as is (dat aan de rechte hoek op deze wijze het getal 1 en niet het getal $\frac{1}{2}\pi$ toegevoegd wordt, is ongebruikelijk en op de duur onhandig; het doet echter niets ter

zake, want het gaat alleen om het principe). Noemen we deze hoek δ, dan zal aan het getal 2 de hoek $\delta + \delta$ toegevoegd moeten worden, aan 3 de hoek $(\delta + \delta) + \delta$, aan -1 de hoek $-\delta$, enz. Daarmee ligt vast, welke hoeken aan de gehele getallen toegevoegd worden. Voorzichtigheid is nog geboden: weten we al zeker, dat als aan de gehele getallen a en b de hoeken α en β toegevoegd worden, aan $a + b$ op deze wijze de hoek $\alpha + \beta$ toegevoegd wordt? Nog niet. Het bewijs zullen we niet in extenso geven; het berust daarop, dat zowel voor de optelling van reële getallen als voor die van hoeken de commutatieve en de associatieve eigenschap geldt.

Welke hoek zullen we aan het getal $\frac{1}{2}$ toevoegen? We moeten nu trachten aan de hierboven gesignaleerde moeilijkheid van dubbelzinnigheid van het antwoord het hoofd te bieden. We merken daartoe allereerst op, dat met elke hoek omkeerbaar eenduidig correspondeert een punt op de eenheidscirkel en wel het punt, waarin het tweede been de cirkel om O met straal 1 snijdt. Met de hoek α correspondeert zo het punt $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. We beperken ons nu tot hoeken „in het eerste kwadrant", d.z. hoeken toegevoegd aan punten $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, waarin $\cos \alpha \geqq 0$ en $\sin \alpha \geqq 0$. Is nu α een hoek in het eerste kwadrant, dan zal

$$\varphi \text{ ligt in het eerste kwadrant en } 2\varphi = \alpha$$

volgens onze reeds bewezen goniometrische formules gelijkwaardig zijn met

$$\cos \varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos^2 \alpha)} \text{ en } \sin \varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos^2 \alpha)}.$$

Aan het getal 1 is toegevoegd de hoek δ met $\cos \delta = 0$, $\sin \delta = 1$. Aan $\frac{1}{2}$ voegen we nu de hoek in het eerste kwadrant toe, waarvoor geldt $2\varphi = \delta$. Dat is dus de hoek, waarvoor geldt $\cos \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Zo voortgaande is het duidelijk, hoe we aan de getallen 2^{-n} (n natuurlijk) hoeken toevoegen. Dan is ook bepaald, welke hoeken toegevoegd worden aan $k \cdot 2^{-n}$ (k geheel). Hierna moeten we weer eerst nagaan, of nog steeds aan de eis van homomorfe toevoeging voldaan is. Dit geschiedt door eerst te laten zien, dat aan $k \cdot 2^{-n}$ en aan $2k \cdot 2^{-n-1}$ dezelfde hoeken toegevoegd zijn. We zijn dan in staat alle breuken gelijknamig te maken. Daarna zorgen de commutatieve en de associatieve eigenschap ervoor, dat aan de gestelde eis voldaan is (op dezelfde manier als bij de gehele getallen). De details van het bewijs zijn langdradig.

Aan alle getallen, die gelijk zijn aan een geheel getal plus een afbrekende duale breuk zijn nu hoeken toegevoegd. Deze getallen

liggen overal dicht in de verzameling van de reële getallen. Het is duidelijk, dat de rest van de toevoeging met behulp van continuïteitsoverwegingen tot stand gebracht moet worden. Anderzijds is niet direct duidelijk hoe, want de hoeken vormden immers geen topologische ruimte, zodat continuïteitsoverwegingen voorshands niet mogelijk zijn. Nu is de verzameling V van de punten op de eenheidscirkel echter gelukkig wel een topologische ruimte (wegens de erin gedefinieerde metriek). Door de omkeerbaar eenduidige afbeelding, die er tussen deze ruimte en de verzameling W van de hoeken met hoekpunt O bestaat, kan men de laatste verzameling ook tot een topologische ruimte maken. We definiëren, dat we onder een open verzameling in W zullen verstaan het beeld van een open deelverzameling van V. Populair gezegd komt dit hierop neer: als op de eenheidscirkel punt Q „in de buurt" van punt P ligt, dan ligt volgens deze afspraak ook de hoek met tweede been OQ „in de buurt" van de hoek met tweede been OP (het eerste been is steeds de positieve x-as).

Nu kunnen we de gaten in onze afbeelding van de reële getallen op de hoeken vullen. Noem R_1 de deelverzameling van de verzameling R van de reële getallen, waaraan reeds hoeken toegevoegd zijn. Onderstel $c \in R \backslash R_1$ (d.w.z. c is een reëel getal, waaraan nog geen hoek toegevoegd is) en $a_1, a_2, \ldots$ is een serie getallen uit R_1, die c als limiet heeft. Aan $a_1, a_2, \ldots$ zijn toegevoegd de hoeken α_1, $\alpha_2, \ldots$. Aan c voegen we dan toe de hoek, die de limiet is van de serie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

Nu zijn we er, tenminste als we ons nog van twee dingen vergewissen kunnen. We moeten nog bewijzen: 1°. bovengenoemde limiet bestaat, 2°. aan de eis van homomorfisme is nog steeds voldaan. We volstaan met een schets van het bewijs.

Noem de aan het getal a toegevoegde hoek $f(a)$ en het daaraan toegevoegde punt van de eenheidscirkel $g(a)$. Beschouw de serie getallen $a_i = 2^{-i}$. Als nu $A_i = g(a_i)$, $P = (1, 0)$ en $\alpha_i = f(a_i)$, dan geldt

$$PA_i^2 = (1 - \cos \alpha_i)^2 + \sin^2 \alpha_i = 2 - 2 \cos \alpha_i.$$

Verder zien we door middel van de halveringsformule van de cosinus voor hoeken in het eerste kwadrant, dat

$$\lim_{i \to \infty} \cos \alpha_i = 1$$

en dus

$$\lim_{i \to \infty} PA_i = 0.$$

Uit de formule voor cos $(\alpha + \beta)$ volgt verder, dat in het eerste kwadrant voor $\beta \neq 0$ geldt cos $(\alpha + \beta) < \cos \alpha$.

Combinatie van deze resultaten levert, dat als $A = g(a)$,

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a > 0,\, a \in R_1}} PA = 0.$$

Wegens cos $(-\alpha) = \cos \alpha$ en sin $(-\alpha) = -\sin \alpha$ kan in dit resultaat de beperking $a > 0$ worden weggelaten, zodat dus

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a \in R_1}} PA = 0.$$

Algemeen geldt: als $A = g(a)$, $\alpha = f(a)$, $B = g(a + c)$, $\alpha + \gamma = f(a + c)$, dan is (onafhankelijk van a)

$$AB^2 = 2 - 2 \cos \gamma.$$

En dus geldt algemeen: bij elke $\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$ zo, dat $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1 \in R_1$ en $x_2 \in R_1$ impliceert $d(g(x_1), g(x_2)) < \varepsilon$. De afbeelding g beeldt dus een fundamentaalrij op een fundamentaalrij af. De ruimte van de punten op de eenheidscirkel is een complete ruimte [1]), d.w.z. in deze ruimte heeft elke fundamentaalrij een limiet. Als een serie getallen $a_i \in R_i$ een limiet heeft, dan heeft de serie $g(a_i)$ dus ook een limiet en daarmee de serie $f(a_i)$ eveneens. Hiermee is de existentie van de limiet aangetoond.

Ten slotte moeten we nog aantonen, dat $\alpha = f(a)$ en $\beta = f(b)$ impliceert $\alpha + \beta = f(a + b)$. Om dit aan te tonen gaan we uit van een rij getallen $a_i \in R_1$, waarvoor $\lim_{i \to \infty} a_i = a$, en een rij $b_i \in R_1$, waarvoor $\lim_{i \to \infty} b_i = b$. Nu geldt voor elke i

$$f(a_i) + f(b_i) = f(a_i + b_i).$$

Wegens $\lim_{i \to \infty} (a_i + b_i) = a + b$ geldt dan ook

$$\lim_{i \to \infty} f(a_i + b_i) = f(a + b).$$

En dus is inderdaad $f(a + b) = f(a) + f(b)$.

Het gevraagde homomorfisme is dus tot stand gebracht.

Hoe moeten we nu met hoeken rekenen? Laten we als voorbeeld gaan oplossen de vergelijking $\cos \varphi = -1$. Hieraan voldoet nog steeds de gestrekte hoek en anders niet. De vergelijking heeft dus één en niet meer dan één wortel.

---

[1]) Omdat ons platte vlak een complete ruimte is en een gesloten deelverzameling van een complete ruimte weer compleet is.

Hiermee vergelijken we de oplossing van de vergelijking $\cos f(x) = -1$. Gevraagd worden hier alle reële getallen x, waaraan door f hoeken zijn toegevoegd waarvan de cosinus gelijk aan -1 is. Alle getallen voldoen dus, waaraan de gestrekte hoek toegevoegd is. De oplossing van de vergelijking luidt dus $x = 2 + 4k$ (k geheel).

Als oplossing van de vergelijking $\cos f(\frac{1}{2}x) = -1$ vinden we analoog $\frac{1}{2}x = 2 + 4k$ en dus $x = 4 + 8k$. Maar willen we de vergelijking $\cos \frac{1}{2}\varphi = -1$ oplossen, dan geraken we in onoverkomelijke moeilijkheden, omdat we niet weten, wat met $\frac{1}{2}\varphi$ bedoeld wordt.

We merken, dat het nog altijd geen zin heeft om van het produkt van een hoek en $\frac{1}{2}$ te spreken. Wel kunnen we het hebben over een hoek, die aan het getal a is toegevoegd, en over de hoek, die aan het getal $\frac{1}{2}a$ is toegevoegd. Maar het heeft geen zin laatstgenoemde hoek de helft van de eerstgenoemde te noemen. Zouden we dit toch doen, dan zouden we merken, dat er nog steeds twee verschillende hoeken zijn, die gelijk aan de helft van een gegeven hoek zijn.

Zodra we „met hoeken gaan rekenen”, rekenen we niet werkelijk met hoeken, maar met de reële getallen, waaraan door de afbeelding f hoeken toegevoegd zijn. Beter is het daarom dan niet de hoeken in de berekening te doen voorkomen, maar de getallen, waaraan ze toegevoegd zijn. Om dit te bewerkstelligen moeten we allereerst definiëren, wat we verstaan onder de cosinus en de sinus van een getal. Het ligt voor de hand te definiëren:

$$\sin x = \sin f(x) \quad \text{en} \quad \cos x = \cos f(x).$$

Lossen we, na deze afspraak gemaakt te hebben, de vergelijking

$$\cos x = -1$$

nogmaals op, dan realiseren we ons eerst, dat hier per definitie staat

$$\cos f(x) = -1,$$

waarna we weer vinden $x = 2 + 4k$.

We definiëren dus niet het produkt van een reëel getal en een hoek. Overal waar een dergelijk produkt schijnt voor te komen, is de bedoeling dat we voor de „hoek” lezen het getal, waaraan hij is toegevoegd. Er is dan nog alleen maar sprake van vermenigvuldiging van twee reële getallen.

Hiermee gepaard gaat, dat van een ordening van hoeken volgens groter en kleiner evenmin sprake is. Er is alleen sprake van de ordening van de reële getallen, waaraan de hoeken toegevoegd zijn. Dit is voldoende, want het zijn alleen deze getallen, die in de berekeningen voorkomen.

Natuurlijk zijn op beperkte schaal een vermenigvuldiging en een ordening te definiëren. Zodra we ons tot een voldoend klein interval beperken, is er geen moeilijkheid meer. Zo hebben we in het voorgaande de helft gedefinieerd van een hoek in het eerste kwadrant, waarbij we dus eigenlijk $0 \leqq x \leqq 1$ ondersteld hebben. Ook kunnen we de hoeken $f(x)$, waarin $0 \leqq x < 4$, op de normale wijze ordenen. Maar in berekeningen, waarin „willekeurig grote hoeken" voorkomen, komen de facto alleen de getallen x en niet de hoeken $f(x)$ voor.

De homomorfe afbeelding van de reële getallen op de hoeken is op verschillende andere manieren tot stand te brengen. Men kan gebruik maken van booglengten op de eenheidscirkel, van andere hulpmiddelen uit de analyse of van de machtsverheffing van complexe getallen met modulus 1. De gevolgde methode heeft het voordeel geen gebruik te maken van onderwerpen, die met de meetkunde slechts verwijderd verband houden. Bovendien is de gevolgde manier beter voor generalisatie vatbaar. En dat laatste is van belang, immers als het ons alleen zou gelukken de „hoekmeting" in de euclidische meetkunde beter te funderen, dan was het resultaat vrij pover. We moeten trachten de hoekmeting niet op een bepaalde metriek te funderen en het is zelfs gewenst hoekmeting helemaal niet op metriek te funderen. We weten namelijk, dat in de ekwiforme meetkunde, d.i. de meetkunde waarin eigenschappen van figuren opgespoord worden die invariant zijn t.o.v. de groep der gelijkvormigheidstransformaties, het begrip hoek optreedt, terwijl er geen metriek gedefinieerd wordt. Elk puntenpaar, dat bestaat uit twee verschillende punten, is ekwiform; er zal dus geen afstand van twee punten gedefinieerd worden. Maar verschillende hoeken zijn er wel, omdat de ekwiforme transformaties een verdeling van de hoeken in ekwivalentieklassen teweeg brengen.

We vragen ons dus af, wat de principiële grondslag is van de hoekmeting. We gaan uit van een topologische ruimte V met daarin een punt O en willen hoeken met hoekpunt O meten. Daartoe is het noodzakelijk, dat in deze ruimte halve lijnen met eindpunt O gedefinieerd zijn. Wat dit zijn, doet hier niet ter zake. In elk geval is noodzakelijk, dat V de vereniging is van al deze halve lijnen [1]) en elk tweetal punt O en geen enkel ander punt gemeen heeft.

Verder moeten we beschikken over een verzameling T van transformaties met de volgende eigenschappen:

a. T vormt een abelse groep t.o.v. de samenstelling van transformaties,

b. elke transformatie uit T laat O invariant,

c. het beeld van een halve lijn bij een transformatie uit T is weer een halve lijn,

d. als l en m halve lijnen zijn, dan is er één en niet meer dan één transformatie uit T, waarbij m het beeld van l is.

Hiermee is voldoende geëist om de optelling van hoeken mogelijk te maken.

We willen echter weer verder gaan en het homomorfisme tussen reële getallen en hoeken tot stand brengen. Daartoe maken we eerst de verzameling van de hoeken met hoekpunt O tot een topologische ruimte, hetgeen we doen door te definiëren, wat onder een omgeving van een hoek verstaan wordt. We beperken ons daarbij weer tot hoeken, waarvan het eerste been constant is, d.w.z. we willen alleen de

[1]) Desnoods kan men zich hier nog tot een omgeving van O beperken.

verzameling van deze hoeken tot een topologische ruimte maken. Onderstel, dat l het vaste eerste been van de hoeken is en dat van een hoek φ het tweede been m is. Kies een van O verschillend punt P op het tweede been. Laat $U(P)$ een omgeving van P zijn, die O niet bevat (nemen we aan, dat de ruimte V een hausdorff ruimte is, dan bestaan er dergelijke omgevingen van P). We beschouwen nu de verzameling van de hoeken met eerste been l, waarvan het tweede been een punt van $U(P)$ bevat. Deze verzameling noemen we een omgeving $U(\varphi)$ van φ.

Totnogtoe zijn aan onze ruimte geen extra eisen gesteld (behalve dan het hausdorff zijn). Om verder te komen, moeten echter weer nieuwe eisen gesteld worden. Allereerst moeten we kunnen beschikken over een rij hoeken (dat het eerste been l is, laten we in het vervolg onvermeld) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, waarvoor geldt

a. voor elke i geldt $\varphi_i = 2\varphi_{i+1}$,

b. $\lim_{i \to \infty} \varphi_i = 0$.

Met het laatste wordt bedoeld, dat hij elke omgeving van de hoek (l, l) een n te vinden is zo, dat voor elke $i > n$ geldt, dat φ_i binnen deze omgeving ligt.

Verder zullen we nog moeten eisen, dat de verzameling van de hoeken $k \cdot \varphi_i$ (k geheel) dicht is in de verzameling van alle hoeken [1]).

Immers eerst daardoor wordt mogelijk gemaakt, dat de reële getallen afgebeeld worden *op* de hoeken. In ons voorbeeld van de euclidische hoekmeting is hiervan niet expliciet melding gemaakt. Men zal echter gemakkelijk verifiëren, dat aan de eis voldaan is door na te gaan, dat de verzameling $\{g(x) | x \in R_i\}$ dicht op de eenheidscirkel ligt.

Ten slotte is nog noodzakelijk, dat elke fundamentaalrij, waarvan de termen reële getallen uit R_1 zijn, als beeld heeft een rij hoeken, die een limiet heeft [1]).

Is aan al deze eisen voldaan, dan laat zich het homomorfisme weer construeren. Het gevolg hiervan is, dat de verzameling van de hoeken met hoekpunt O ééndimensionaal zal zijn.

We overtuigen ons er nu zonder moeite van, dat in de ekwiforme meetkunde op deze manier een „hoekmeting" mogelijk is. We kunnen weer uitgaan van het vlak, dat bestaat uit de geordende paren reële getallen (x, y), waarin op „normale" manier omgevingen gedefinieerd zijn. De groep transformaties, die de optelling van hoeken mogelijk maakt en ten slotte ook het homomorfisme, is weer

$$\begin{array}{l} x' = px - ry \\ y' = rx + py \end{array} \quad (p^2 + r^2 = 1).$$

We kunnen ons nog van één overtolligheid bevrijden. Waarom zouden we uitsluitend hoeken beschouwen, waarvan de „benen" halve lijnen zijn? We kunnen meer algemeen aannemen, dat O een deelverzameling van V is. De „halve lijnen" worden vervangen door verzamelingen, die aan dezelfde eisen blijven voldoen als te voren. De groep T van de transformaties blijft ook aan dezelfde eisen voldoen, waarbij nu niet het punt O, maar de verzameling O invariant moet blijven. Op deze wijze zouden we de hoeken van halve vlakken met gemeenschappelijke eindrechte kunnen beschouwen zonder deze terug te brengen tot hoeken tussen halve lijnen.

---

[1]) Geëist moet daarbij nog worden, dat de reeds gedefinieerde optelling van hoeken continu is, d.w.z. dat $\alpha + \beta$ een continue functie van β is.

Om pathologische gevallen te voorkomen is het verder aan te raden af te spreken, dat er een kleinste positief getal a bestaat, waarvoor geldt $f(a) = f(0)$. Het getal a wordt meestal gelijk gesteld aan 2π of aan 1.

KORREL CXXXII

Verzamelingen

Iedere wiskundeleraar heeft natuurlijk verschillende meetkundeboekjes in zijn boekenkast staan. Die boekjes zijn al of niet traditioneel van opzet. Het is me opgevallen dat bijna al deze boekjes in het onderdeel „verzamelingen" eenzelfde slordigheid vertonen.

In de gangbare bewijzen van de eigenschap, dat de verzamelling V_1 van de punten die evenver van twee gegeven punten A en B liggen, gelijk is aan de verzameling V_2 van de punten die op de middelloodlijn van AB liggen, wordt het midden M van AB ten onrechte buiten beschouwing gelaten. Voor M geldt per definitie $MA = MB$, dus M behoort tot V_1, de middelloodlijn gaat per definitie door het midden van AB, dus M behoort ook tot V_2.

De bissectrice van een hoek is als puntverzameling W_1 gelijk aan de verzameling W_2 van de punten die niet buiten de hoek en evenver van de benen van de hoek liggen. In het bewijs van deze stelling moet het hoekpunt afzonderlijk beschouwd worden. Dit punt ligt op de bissectrice en behoort dus tot W_1; tevens behoort dit punt tot W_2, daar de afstand tot de benen van de hoek gelijk is (aan nul n.l.).

De stelling over de bissectrice wordt in geen van de in mijn bezit zijnde meetkundeboekjes correct geformuleerd!

Ook in de stereometrie komen we verwante slordigheden tegen. Het lijkt me niet nodig ze hier op te noemen; in verband met het voorgaande zijn ze gemakkelijk te vinden.

Wageningen W. Bergman

VERSCHEIDENHEDEN

door

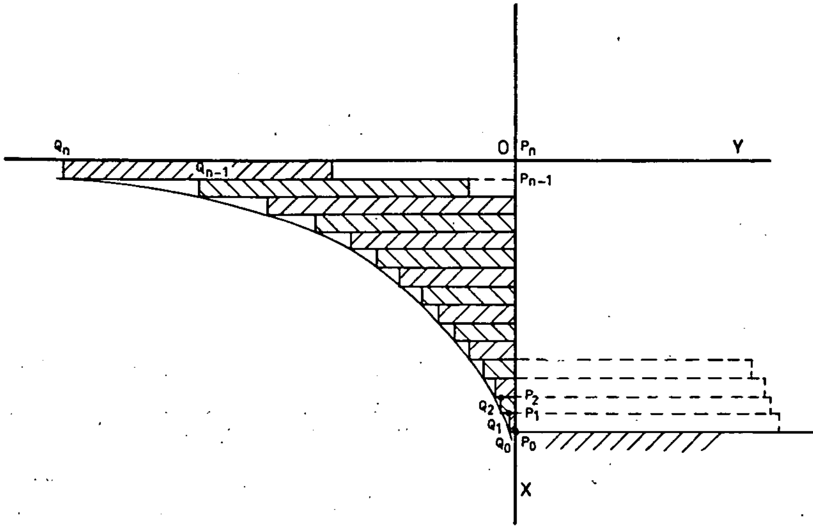
Prof. dr. O. Bottema

Delft

LXII *Kaarten leggen*

Door een neiging, vermoedelijk verwant aan die vaders spelen doet met de spoortreinen hunner zonen, nemen wij regelmatig kennis van *Pythagoras*, Wiskundetijdschrift voor jongeren. Nummer 4 van de vierde jaargang (1964-65) vestigde (pg. 82-84) de aandacht op een merkwaardig bouwwerk, opgetrokken uit los gestapelde, met overleg geplaatste lucifersdoosjes, waarbij elk hogere weer wat meer uitsteekt dan de vorige. Het verrassende is dat men, door genoeg doosjes te nemen. de horizontale afstand van het bovenste en het onderste doosje zo groot kan doen worden als men wil. Het bewijs berust op een eenvoudige regel der statica en op de divergentie der harmonische reeks.

Wie de integratie der schoolvakken nog verder wil doorvoeren kan de constructie ook met de infinitesimaalrekening in verband brengen. *Pythagoras* ried reeds aan om speelkaarten als bouwstenen te gebruiken en het geeft ter aangehaalder plaatse een fraaie figuur, die nieuwsgierig maakt naar de vorm die het bouwsel zal aannemen als men zeer vele, zeer dunne kaarten legt. De toestand is in onze figuur geschetst. De stapel vormt een trap, waarvan alle treden even hoog zijn, maar waarbij de diepte (of de oppervlakte) van de treden groter wordt naar mate men hoger komt. Wordt het aantal treden groot, maar de hoogte van elk klein, dan nadert de begrenzing tot een kromme lijn die in de figuur al duidelijk voor den dag komt. P_0 is het linker eind van het tafelblad, dat het fundament is van de constructie; loodrecht daarboven liggen telkens op de afstand d (de hoogte van het doosje of de kaart) de punten P_1, P_2, . . ., P_n. Is $2a$ de lengte van een kaart, dan steekt bij een zo efficiënt mogelijke constructie, de eerste kaart uit met een stuk $P_1Q_1 = \dfrac{a}{n}$, het tweede over $P_2Q_2 = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1}\right)a$; algemeen het k^{de} over een stuk $P_kQ_k = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1} + \ldots + \dfrac{1}{n-k}\right)a.$



De gebroken lijn $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ is een benadering van onze kromme. Wij laten n onbegrensd toenemen en tegelijkertijd d tot nul naderen en wel zo dat nd, dat is de hoogte h van de toren, niet verandert. P_n is dus een vast punt; wij kiezen het als oorsprong van het assenstelsel OXY, zoals in de figuur is aangegeven. De punten Q_k vormen de grafiek van een functie die voor $x = x_k = (n - k)\dfrac{h}{n}$ gedefinieerd is en in dat punt de waarde $-P_kQ_k$ heeft. Wij doorlopen de gebroken lijn van Q_n naar Q_0, dus in de richting van toenemende x.

De helling van het stuk Q_kQ_{k-1} is

$$\frac{P_kQ_k - P_{k-1}Q_{k-1}}{d} = \frac{a}{(n-k)d} = \frac{a}{x_k}$$

De gebroken lijn nadert dus tot een kromme, die de grafiek is van een functie y van x, gedefinieerd voor $0 \leqq x \leqq h$, waarvan de richting van de raaklijn gelijk aan $\dfrac{a}{x}$ is en die voor $x = h$ gelijk is aan nul.

Uit $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{a}{x}$ volgt dan $y = a \ln \dfrac{x}{h}$ $\quad (0 < x \leqq h)$

en de gevraagde kromme is dus een stuk van een grafiek die in elk algebra-boek staat.

RECREATIE EN REKENMACHINES

Op dinsdag 2 november was Wimecos de gast van Philips N.V. in Eindhoven. De ontvangst was dermate goed verzorgd en het onthaal zo gul, dat dit alleen al de eerste helft van de titel zou kunnen verklaren. Maar de titel is toch om andere redenen gekozen.

Ir. W. Nijenhuis hield een voordracht, waarin hij de principes van de digitale rekenmachines uiteenzette. Daarna vertelde Prof. Dr. C. J. Bouwkamp ons iets over het oplossen van meetkundige puzzels door middel van rekenmachines. Van een gedeelte van deze voordracht volgt hieronder een verslag.

Het op te lossen probleem is: verdeel een rechthoek in een aantal vierkanten. Om triviale oplossingen uit te sluiten, stellen we de volgende twee voorwaarden:

a. geen twee aangrenzende vierkanten mogen congruent zijn,

b. als de zijden van de rechthoek a en b zijn ($a > b$), mag geen van de vierkanten zijden b hebben.

Een eenvoudig voorbeeld van een rechthoek, die op de voorgeschreven manier in vierkanten verdeeld is, vindt men in fig. 1. De zijden van de rechthoek zijn 11 en 15. Hij is verdeeld in 9 vierkanten, waarvan er 2 zijden 6, 2 zijden 5, 2 zijden 4, 1 zijden 3 en 2 zijden 1 hebben. De vierkanten zijn in de figuur genummerd 1-9.

Aan de hand van deze oplossing gaan we nu trachten een methode te vinden oplossingen op te sporen. We denken ons de rechthoek van homogeen geleidend materiaal. Er wordt een stroom doorgevoerd van boven naar beneden. Omdat de weerstand van een homogene plaat evenredig is met de lengte en omgekeerd evenredig met de breedte, is de weerstand van alle vierkanten gelijk. Stel deze b.v. 1Ω. We vervangen nu de vierkanten door geleidende draden met weerstand 1Ω. We krijgen dan het dradennet, dat getekend is in fig. 2. De nummers van de draden corresponderen met de nummers van de vierkanten. De pijltjes geven de stroomrichting aan.

Laten we nu eens onderstellen, dat we de maten van de vierkanten kwijtgeraakt zijn. Hoe kunnen we die uit het dradennet terugvinden. We herinneren ons, dat er voor een dergelijk stroomnet twee wetten van Kirchhoff gelden:

a. in elk punt is de som van de inkomende stroomsterkten gelijk aan de som van de uitgaande,

b. als we in de stroomrichting op twee manieren van P naar Q

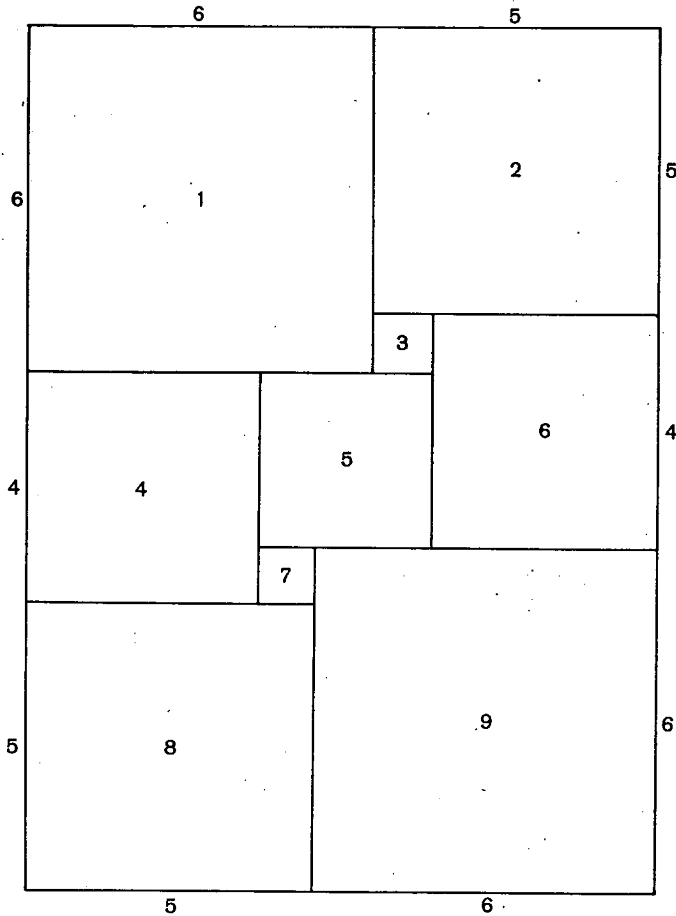


fig. 1

kunnen gaan, is langs de twee wegen het potentiaalverval hetzelfde (in ons geval, omdat alle weerstanden 1Ω zijn, is de som van de stroomsterkten in de doorlopen draden dezelfde).

Nu kunnen we de maten van de vierkanten terugvinden. Stel de stroomsterkte in AC gelijk aan a en die in AB gelijk aan b. We vinden dan achtereenvolgens voor de stroomsterkte in

BC	$a - b$	(2e wet)
BD	$2b - a$	(1e wet)
CD	$3b - 2a$	(2e wet)
CE	$4a - 4b$	(1e wet)
DE	$6a - 7b$	(2e wet)
EF	$10a - 11b$	(1e wet)
DF	$12b - 9a$	(1e wet) en $16a - 18b$ (2e wet).

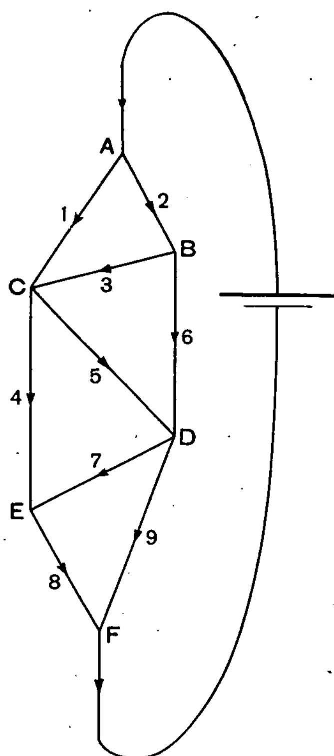


fig. 2

Hieruit volgt

$$12b - 9a = 16a - 18b$$

met als eenvoudigste oplossing $a = 6$, $b = 5$. Men reconstrueert nu gemakkelijk de verdeling, waarvan we zijn uitgegaan.

Men zal inzien, dat de wetten van Kirchhoff direct een meetkundige interpretatie toelaten. Het gebruik van de eerste wet geeft weer, dat de afmetingen van de vierkanten „in de breedte" kloppen en het gebruik van de tweede wet, dat deze afmetingen „in de lengte" kloppen.

We gaan ons nu losmaken van het aanvankelijk gegeven voorbeeld en vragen, hoe we een willekeurige oplossing van het gestelde probleem kunnen vinden. Daartoe maken we eerst een stroomnet. Dit maken we zo, dat in elk verdeelpunt ten minste drie draden samenkomen, overeenkomstig de twee hierboven gestelde voorwaarden. In een van de draden van het net zetten we een accu. De weerstanden van de overige draden kiezen we gelijk. We lezen

af, hoe groot de stroomsterkten in de verschillende draden zijn. Hiermee zijn de verhoudingen van de zijden van de vierkanten bekend. Een prachtig voorbeeld van een analoge rekenmachine.

Men zou geneigd zijn op te merken, dat een digitale rekenmachine ook wel in staat moet zijn de vergelijkingen, die de wetten van Kirchhoff levert, op te lossen. Dat is inderdaad zo gebeurd, maar het vereist diepliggende wiskundige methodes.

Als enig probleem blijft nu nog over het opsporen van de mogelijke netwerken. Het is gelukt ook in dit probleem systeem te brengen zo, dat het door een digitale machine kan worden uitgewerkt.

Resultaten. Het eenvoudigste netwerk, dat oplossingen geeft zonder congruente aan elkaar grenzende vierkanten, is het netwerk waar we van uitgegaan zijn. Een verdeling in minder dan 9 vierkanten is dus nimmer mogelijk. Dat de gegeven verdeling de enig mogelijke verdeling van een rechthoek in 9 vierkanten is, staat hiermee nog niet vast. Men kan nog proberen de accu in een van de andere draden te zetten en te onderzoeken, of men dan een resultaat krijgt, dat toelaatbaar is en bovendien van het onze verschilt. Ook zou men kunnen proberen een ander netwerk van 10 draden te maken en in één daarvan een accu te plaatsen. Vgl. de recreatie-opgave in dit nummer.

Men heeft zich in de loop van de jaren speciaal geïnteresseerd voor het probleem een vierkant te verdelen in een aantal ongelijke vierkanten. Het minimale aantal, waarin dit gelukt is, bedraagt 24 [1]). Dit aantal is gevonden door Willcocks „uit de hand". De vraag is, of dit werkelijk het minimum is. Met de machine zijn alle mogelijkheden onderzocht van verdelingen van rechthoeken in hoogstens 19 vierkanten. Bij deze rechthoeken bevond zich geen vierkant. Meer is nog niet bekend.

P. G. J. Vredenduin

---

[1]) Deze verdeling heeft de schoonheidsfout, dat er een rechthoek in voorkomt, die in vierkanten onderverdeeld is. Het minimale aantal, waarbij dit euvel niet optreedt, is voorzover totnogtoe bekend 25.

THE UICSM PROGRAM, OLD AND NEW [1]

by

MARTIN S. WOLFE

Research Assistant Professor of Education
at the University of Illinois, U.S.A.

The University of Illinois Committee on School Mathematics (UICSM) has been working since 1951 on the development of new mathematics curricula for the schools. Financial support for the work has come from various groups in addition to the University of Illinois. Major support has come in the past from the Carnegie Corporation of New York and from the U.S. Office of Education. The work is currently being supported by the National Science Foundation, an agency of the federal government.

School Organization in the U.S.A.

In order to establish the context for the remarks which follow, a brief description of school organization in the United States seems appropriate at the outset. Although there is no one plan of school organization common to all states, certain aspects can be described as typical. A child begins his formal schooling at age 6 years when he enters grade 1. He completes one grade per year until he is approximately 17 or 18 years of age. Following the completion of grade 12, the child may go on to higher education in a college or university. In many school systems, the child attends an elementary school for grades 1—6, a junior high school for grades 7—9, and a senior high school for grades 10—12. In other school systems, the child attends an elementary school for grades 1—8, and a high school for grades 9—12. In either case, the student earns high school credits for courses taken in grades 9—12. The record established by the student during these four high school years is used by colleges and universities in determining whether the student has met entrance requirements. Four years of work

---

[1]) This article has been based on notes prepared by Professor Max Beberman for his presentation at the International Colloquium on Modern Curricula in Secondary Mathematical Education, Utrecht, Netherlands, December 19—22 1964.

at a college or university are typically required to complete requirements for a bachelor's degree. For the purposes of this paper, the four college years will be referred to as grades 13—16.

Situation in 1951

In 1951, the United States was faced with an apparently severe shortage of college-trained engineers. A search for possible solutions to the problem led investigators at the University of Illinois to the conclusion that the high school mathematics curriculum was in need of revision. Many students stopped taking mathematics at the end of grade 10. Many schools did not offer a mathematics course in grade 12. The engineering curriculum at the University of Illinois and at other state universities was hampered by the fact that a large number of engineering students did not take calculus until grades 13½ or 14. This delayed the introduction into the students' program of studies of physics courses which have calculus as a prerequisite, and consequently delayed all other professional courses. In addition, mathematics was a very unpopular subject in high school and in college.

The University of Illinois proposed that by 1953 all engineering students would start their university work with calculus in grade 13. Students would take examinations before entering the university, and if they did not meet requirements which would allow them to begin calculus in grade 13, they would not be able to complete the requirements for a degree in engineering in four years.

The University informed all high schools in the state of Illinois of the change in policy. At the same time, the UICSM was established to experiment with a new curriculum designed to help schools better prepare their students. The UICSM, as originally established, consisted of a teacher of mathematics at the laboratory high school of the University of Illinois, a professor of mathematics, a professor of education whose area of specialization was mathematics, and a professor of engineering.

The committee prepared a 9th-grade mathematics course which was then taught by Beberman at the laboratory high school. Following this, a 10th-grade course was written and the 9th-grade course was revised. The 9th-grade revision was taught in two high schools in Illinois. By 1957, a four-year course for grades 9—12 had been prepared and was being taught in twelve high schools. By this time also, the UICSM was conducting extensive teacher-training activities to prepare teachers to use the new materials. In addition, a huge teacher's manual had been prepared

to accompany the new text materials. By 1962, 150 schools were participating in the experimentation. During the period of experimentation, the various courses in the four-year sequence underwent numerous revisions. The revisions were based on reports submitted by participating classroom teachers and on experiences accumulated by the UICSM staff.

Hard-cover textbooks coauthored by Beberman, the Director of the UICSM, and Vaughan, the Chief Mathematician of the UICSM, are currently being published by D. C. Heath and Company of Boston. *High School Mathematics, Course* 1 and *High School Mathematics, Course* 2 are now in print. Course 3 is scheduled for publication in August, 1966, and Course 4 in August, 1967. For each of the courses now in print, there is a pupils' edition and a teachers' edition of the text. The teachers' edition, in each case, is a large volume containing a copy of each pupil page, answers to exercises, suggestions of techniques for presenting the material, and an extensive treatment of the mathematics involved.

Pedagogical Features

The UICSM text materials are characterized by certain pedagogical features. Students are led to discover for themselves many mathematical patterns and properties of numbers. The presentation is designed to develop an awareness, at a nonverbal level, of mathematical concepts. No explicit statement of any mathematical principle or rule is made until after the language required to make such statements precise has been introduced. The student is not asked to verbalize a mathematical principle or rule until after he has had a chance to develop an appreciation for precision of language and has learned some of the language necessary for precision. Basic number operations are developed through an appeal to physical reality. The axioms necessary to develop the real number system as a complete ordered field are introduced through an appeal to intuition.

Content

Courses 1, 3, and 4 (intended for use in grades 9, 11, and 12) are best characterized as being a deductive organization of the real number system as a complete ordered field. Course 2 (intended for use in grade 10) is essentially a treatment of Euclidean geometry with emphasis on metric axioms as proposed by Birkhoff. The language and notation of elementary set theory are used in both the algebra and the geometry courses.

Course 1 includes the following topics:

Numerals
Things and their names; numbers and numerals

Real Numbers
Positive and negative numbers and zero; intuitive introduction based on physical world situations

Properties of Real Numbers
Commutative, associative, distributive properties; identity elements; informal introduction to proof
The Language of Algebra
Open sentences; generalizations; quantifiers; letters as indices and as variables

Operations and Inverses
Singulary and binary operations; inverses; subtraction; division

Deductive Organization
Postulates; theorems; logical principles for equality; proof

Real Numbers and Numbers of Arithmetic
Isomorphisms

Algebraic Manipulation

Order and Sets
Greater Than relation; the number line; graphing of sets of numbers; the number plane; graphing of sets of ordered pairs of numbers

Equations, Inequations, Problems
Linear equations; quadratic equations; systems of equations; application problems

Course 2 is primarily concerned with the geometry of the plane and includes the following topics:

Introduction
Axioms on incidence and order

Segments
Metric axioms

Angles
Congruence; segment-angle congruence axiom

Triangles
Proof

Inequality Relations
Parallel Lines

Polygons
Necessary and sufficient conditions

Similar Polygons
Trigonometric ratios; cosine and sine laws

Coordinate Geometry
Rectangular coordinate systems; proof

Circles

Area

An Appendix on the Rules of Reasoning

An Appendix on 3-dimensional Geometry

The published versions of **Courses 3** and **4** will most likely follow rather closely the previous versions of these courses. These courses will include the following topics:

Relations and Functions
Function composition; inverses; functional dependence; linear and quadratic functions

Axiomatic Description of the Positive Integers
Integers; mathematical induction; recursive definitions; sequences; continued sums; progressions; continued products; integral exponents; combinations; binomial theorem

Completeness of the Real Number System
Least upper bound axiom; power functions; root functions; exponential functions; logarithmic functions

Circular Functions

Complex Numbers

New Programs

Since 1962, the UICSM has been developing and experimenting with a program for grades 7 and 8. This program, which is still experimental, is designed for culturally disadvantaged children who have demonstrated low achievement in mathematics. The content of the experimental 7th-grade course is primarily concerned with the arithmetic of the (unsigned) rational numbers. The unsigned integers (1, 2, 3, . . .) are regarded as multiplicative

operators on length. Inverses of multiplicative operators are considered. The (unsigned) rational numbers are presented as compositions of multiplicative operators and the inverses of multiplicative operators.

The experimental 8th-grade course continues the development of arithmetic started in the experimental 7th-grade course. In addition, the 8th-grade course contains an extensive development of geometry. The geometry is developed on an intuitive basis only; no attempt is made to present a formal axiomatized development.

Also in 1962, the UICSM began experimenting with a program for grades 10 and 11. This new course, designed for college-bound students, presents a vector approach to geometry and includes many topics from trigonometry and analytic geometry.

The experimental two-year course in vector geometry includes the following topics:

Translations of 3-dimensional Euclidean Space
Algebra of Points and Translations
Commutative Groups
Set of Translations as a Commutative Group
Set of Translations as a Vector Space
Linear Dependence and Independence

In general, the UICSM Mathematics Project is devoted to the improvement of school mathematics curricula through the development of instructional materials and teacher education. The Project staff believes that it is possible to present a consistent exposition of school mathematics which is both interesting and understandable to students.

STAATSEXAMEN GYMNASIUM A EN B 1965 UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE

WISKUNDE

Door de A-kandidaten werd voor het onderdeel algebra (eventueel aangevuld met geschiedenis van de wiskunde of statistiek) gemiddeld 4,9 (v.j. 5,2) behaald.

196 kandidaten kozen de leerstof voor de klassen 1 t/m 4 met uitzondering van logaritmen en rijen.
90 kandidaten kozen logaritmen en rijen,
19 kandidaten kozen de beginselen van de differentiaalrekening,
10 kandidaten kozen hoofdstukken uit de geschiedenis van de wiskunde,
4 kandidaten kozen statistiek.

Er wordt nogmaals op gewezen dat de kwadratische functies en de vierkantsvergelijkingen tot de voor iedere kandidaat verplichte leerstof behoren, ook al heeft men geschiedenis van de wiskunde of statistiek gekozen.

De subcommissie neemt er geen genoegen mee, dat iemand de uiterste waarde van een kwadratische functie uitsluitend met behulp van een formule kan bepalen; men moet de methode van het afsplitsen van een kwadraat kunnen toepassen en verklaren.

Bij het onderwerp logaritmen moet men niet klakkeloos overgaan op het grondtal 10, maar kieze men een voor het vraagstuk geschikt grondtal.

Verder vestigt de subcommissie de aandacht op het feit dat kandidaten, die de leerstof voor de klassen 1 t/m 4 kiezen, zich niet tot de kwadratische functie en de vierkantsvergelijking mogen beperken, tot die leerstof behoren o.a. ook wortelvormen en stelsels lineaire vergelijkingen met twee onbekenden met de bijzondere gevallen, die zich daarbij kunnen voordoen. Voor het onderdeel meetkunde was bij de A-kandidaten het gemiddelde cijfer 4,8 (v.j. 5,1). Slechts 37 kandidaten kozen de stereometrie (v.j. 29); ook bij deze keuze dient men bekend te zijn met de eenvoudige planimetrische begrippen en stellingen die naar aanleiding van het examen ter sprake kunnen komen.

Bij de examens in de planimetrie constateerde de subcommissie weer, dat men zich soms niet de moeite getroost had voldoende aandacht te besteden aan de goniometrie; indien dit onderdeel wel was bestudeerd bleek men toch vaak geen notie te hebben van het juiste gebruik van de sinus- en de cosinusregel; $a = 2R \sin A$ was voor vele kandidaten een formule waarvan ze pas tijdens het examen kennis namen.

Naar het oordeel van de subcommissie doen de kandidaten er verstandig aan zich op de hoogte te stellen van de inhoud der verslagen van de examens der voorgaande jaren, die door de staatsuitgeverij gepubliceerd werden; alleen reeds daardoor zouden vele misvattingen kunnen worden voorkomen.

Bij de B-kandidaten werd voor algebra gemiddeld 5,3 (v.j. 5,8) behaald. Deze getallen zijn voor de stereometrie 5,0 (v.j. 4,8) en voor de goniometrie en analytische meetkunde 4,8 (v.j. 5,7). Slechts bij enkele kandidaten werd een slecht schriftelijk examen gecompenseerd door een goed mondeling examen.

Overigens gaven de B-examens voor de subcommissie geen aanleiding tot opmerkingen.

STAATSEXAMEN H.B.S.-A EN B 1965
UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE

WISKUNDE

h.b.s.-A

Ondanks de opmerkingen in de verslagen van vorige jaren blijkt het peil van de kandidaten voor het vak wiskunde in 1965 niet hoger te liggen dan in de jaren daarvoor. De commissie krijgt de indruk, dat het vak wiskunde voor het A-diploma wordt verwaarloosd. Naar aanleiding van haar ervaringen bij de examens van dit jaar opgedaan, wil ze met klem er op wijzen, dat de kandidaten goed begrip moeten hebben van de definities van de wortel van een vergelijking, van de logaritme, van de cirkel van de bissectrice en de zwaartelijn, van de functies, van het extreem van de tweede graadsfunctie; aan deze begrippen ontbrak heel wat. Zelfs zeer bekende formules en eigenschappen, zoals van de wortels van een vierkantsvergelijking, van t_n en s_n der reeksen, van de oppervlakte van een driehoek, werden te vaak gemist, terwijl het gebruik van de grafieken zeer veel te wensen overliet. Het schetsen van de grafieken van de functies x^2, $x^2 + 4$, $x^2 + 4x$ vonden de meeste kandidaten

moeilijker dan van $x^2 - 6x + 8$ (afgericht up het ,,afsplitsen van een kwadraat"!); de grafiek van de eerste graadsfunctie was in de vergetelheid geraakt.

Het gebrek aan rekenvaardigheid was dikwijls ontstellend; wat was het voor sommigen een inspanning om x te vinden uit $\frac{3}{4}x = \frac{2}{3}$ of om uit het hoofd $\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$ te bepalen! Een enkeling had niets aan goniometrie gedaan, velen echter te weinig. Nogmaals wijst de commissie er op, dat gekend moeten worden: de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens en hun onderlinge betrekkingen in het 1ste en 2e kwadrant, de oppervlakte van de driehoek, R, de sinus- en de cosinusregel en het werken hiermede.

h.b.s.-B Algebra

De resultaten van het schriftelijk examen lieten veel te wensen over. De subcommissie is van mening, dat deze slechte resultaten grotendeels te wijten zijn aan een onvolledige voorbereiding en vooral ook aan de zeer nonchalante wijze van opschrijven. Herhaaldelijk is het schrift onleesbaar en wordt het werk ontsierd door vele doorhalingen.

Mondeling

Er zou kunnen worden verwezen naar de verslagen van voorgaande jaren, daar steeds weer dezelfde tekortkomingen geconstateerd worden. Bij het bepalen van de extreme waarde van de kwadratische functie $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ komt het nog voor, dat een kandidaat onmiddellijk zegt: voor $x = -\frac{b}{2a}$ is de extreme waarde $-\frac{D}{4a}$. Dit is volkomen waardeloos, als het alleen maar zonder begrip, uit het hoofd is geleerd. Bij het onderzoek naar extreme waarden van functies in het algemeen wordt bijna altijd gezegd: er is een extreme waarde, als $f'(x) = 0$ is. Weer wijst de sub-commisie er op, dat een tekenonderzoek van de eerste afgeleide bij het bepalen van de uiterste waarden de voorkeur verdient boven het gebruik van de tweede afgeleide. Bij dit laatste ontbreekt nl. in de regel ieder begrip. Nodig is ook, dat bij dit onderzoek de kandidaat controleert, dat het gevonden argument, waarvoor een extremum zou kunnen optreden, tot het definitiegebied behoort. Fouten en slordigheden als: ${}^2\log x$ bestaat voor $x \geqq 0$, $\sqrt{x}$ bestaat voor $x > 0$, $|x - 2| = x - 2$ voor $x > 2$ en $|x - 2| = -x + 2$ voor $x < 2$ komen herhaaldelijk voor. Kwadrateren van twee leden van vergelijking of ongelijkheid wordt vaak ,,zonder blikken of blozen" uitgevoerd. Weinig kandidaten kunnen precies meedelen, wanneer een rij sommeerbaar is en wat onder de som wordt verstaan. Tenslotte dient te worden opgemerkt, dat het geven van een gave definitie (bijv. van stijgende functie, differentiaalquotiënt enz.) voor de kandidaten in de regel een te zware opgave is en dat het verwisselen van begrippen als functie en grafiek, nulpunt en wortel, vergelijking en ongelijkheid enz. helaas schering en inslag is.

h.b.s.-B Stereometrie

Over het algemeen vertonen de resultaten een stijgende lijn. Opgemerkt moet worden, dat de kandidaten zich nog meer dienen te oefenen in het zinvol opbouwen van de oplossing van een probleem met verwerking van alle gegevens; het komt nog te vaak voor, dat zij hulplijnen of hulpvlakken aanbrengen zonder zich af te vragen of juist déze bijdragen tot de oplossing.

In verband met de ontwikkeling van het wiskunde-programma is het wenselijk, dat de kandidaten het begrip verzamelingen goed bestuderen, zodat zij dit ook vlot kunnen toepassen in ruimtelijke figuren.

Tenslotte: de inhoud van een afgeknot prisma moet kunnen worden berekend.

h.b.s.-B Goniometrie

Het is de sub-commissie opgevallen, dat nog steeds vele kandidaten moeilijkheden hebben met het uitdrukken van hoeken in radialen, vooral bij het vervaardigen van eenvoudige grafische voorstellingen. Bovendien bleek in menig geval aan de elementaire feitenkennis bitter weinig aandacht te zijn besteed.
Zo kwam het zelfs voor dat een eenvoudig probleem in de eerste aanloop zó veel tijd ging kosten, dat van normale uitwerking en bespreking geen sprake kon zijn.

h.b.s.-B Analytische meetkunde

Vele kandidaten hebben een te enge kennis aan formules voor de rechte lijn, zodat eenvoudige gevallen soms slechts langs een grote omweg konden worden herleid. Verder kreeg de sub-commissie de indruk, dat de kennis van de hyperbool vaak te wensen overlaat. Tenslotte heeft menigeen de grootste moeite om zijn bewerkingen en behaalde resultaten in correct en nauwkeurig Nederlands toe te lichten.

BOEKBESPREKING

Dr. Jozef H. Leenders, *Verzamelingen en Relaties*, met opgaven en een appendix over groepen; grondbeginselen van moderne wiskunde, De Sikkel N.V., Antwerpen, 1963, 236 bladz., 245 figuren, prijs BFr. 180.

Het is verheugend, dat de wiskundeliteratuur van het Nederlandse taalgebied is verrijkt met een goed boek over moderne wiskunde. De schrijver zegt in zijn voorwoord, dat dit boek gelezen kan worden door een ieder die tenminste lager secundair onderwijs genoten heeft. Inderdaad wordt er bij de lezer weinig voorkennis vereist, echter wel een zekere dosis wiskundig bevattingsvermogen. De stijl van dit boek is zeer duidelijk en zonder omhaal. Bij de verzamelingen wordt de uiteenzetting van de theorie afgewisseld met voorbeelden en toegelicht met venn-diagrammen. Dan volgt echter ook van elke stelling het formele bewijs, geschreven met gebruikmaking van de symbolentaal der wiskundige logica. Allerlei details maken de behandeling van de stof prettig en modern. Zo wordt bijvoorbeeld het interessante ,,symmetrische verschil'' van twee verzamelingen uitvoerig besproken.
Na de invoering van het cartesisch produkt van twee verzamelingen A en B gaat de auteur over op het beschouwen van relaties van A naar B. Ook hier weer een zeer geslaagde toelichting van de theorie met figuren; relaties aangegeven met pijlen of met behulp van de roosterafbeelding van het direkte product A × B. Bij de relaties van verzameling A naar verzameling B wordt onderscheid gemaakt tussen eenwaardige (elk origineel slechts één beeld) en meerwaardige en tussen eenduidige (elk beeld slechts één origineel) en meerduidige relaties. Deze begrippen worden met voorbeelden en pijlen-diagrammen duidelijk gemaakt en daarna formeel gedefinieerd. Even een voorbeeld van zo'n definitie:
($\hat{r}$ is een meerduidige relatie van A naar B) $\Leftrightarrow \hat{r} \subseteq A \times B \;\&\; \exists b \in B$: $(\exists a_1, a_2 \in A$: $a_1 \neq a_2 \;\&\; (a_1, b) \in \hat{r} \;\&\; (a_2, b) \in \hat{r})$.
Zoals men hier ziet wordt de inclusie-betrekking aangegeven door $\subseteq$. Het teken $\subset$ wordt gereserveerd om ,,echte'' deelverzamelingen aan te geven. Een bijzonder soort relaties vormen de functies. Definitie: Een functie of afbeelding van een verzameling A naar een verzameling B is een eenwaardige relatie, waarvan het definitiegebied samenvalt met A. Notatie: $\hat{f}$: $A \rightarrow B$. Van de rijke inhoud noem ik verder nog de hoofdstukken over equivalentierelaties en over ordeningsrelaties.

Als gebruiksmogelijkheden van dit werk vermeldt het voorwoord o.a. handleiding voor de cursisten aan de werkgroepen van het Belgisch Centrum voor de Methodiek van de Wiskunde, leerboek in de hogere cyclus van de Humaniora en gebruik bij verschillende technische scholen. In Nederland zie ik voor gebruik op de middelbare school op dit ogenblik nog geen mogelijkheid. De behandelde begrippen en methoden zullen echter ongetwijfeld binnen afzienbare tijd in onze scholen hun intrede doen. Daarom is het boek ten zeerste aan te bevelen voor leraren die hun kennis op dit gebied willen verdiepen of opfrissen. Ze hebben dan meteen de gelegenheid om al vast eens te overdenken hoe men deze zaken op de school zal moeten presenteren.
De talloze oefeningen die het boek bevat verhogen de bruikbaarheid nog ten zeerste.

R. Troelstra

Crouch, Baldwin, Wisner: *Preparatory Mathematics for Elementary Teachers*, John Wiley and Sons, 1965, 505 blz., prijs 66/–.

Hoewel de inhoud van dit boek voor de lezers van Euclides van weinig belang is, willen we er toch een korte beschouwing aan besteden. Het enige excuus voor deze handelswijze is, dat dit lijvige werk naar Nederlandse begrippen een curiosum is. In hoeverre deze kwalifikatie ook naar Amerikaanse begrippen juist is, dat kunnen wij niet beoordelen.

De Amerikaanse kweekschoolleerlingen worden geacht dit boek door te kunnen werken in een enkel semester, als er tenminste zes lesuren per week beschikbaar zijn. Doen zij dat, dan hebben zij een grondig inzicht kunnen verwerven in de bouw van het stelsel rationale getallen en in de manier waarop men dit stelsel stapsgewijs kan laten ontstaan uit de verzameling van de natuurlijke getallen. De behandeling van deze moeilijke materie is zeer geleidelijk en gericht op het verkrijgen van een helder inzicht. En *daarom* is die behandeling ook flink strak en exact en niet alleen maar causerend en plausibel-makend. Als voorbeeld kan dienen, dat een rationaal getal gedefinieerd wordt als een equivalentieklasse van breuken onder de relatie $(a/b \sim c/d) \Leftrightarrow (ad = bc)$.

Het laatste hoofdstuk handelt over de uitbreiding van de verzameling rationale getallen tot de verzameling reële getallen. Natuurlijk kan dit hoofdstuk niet zo exact zijn als de vorige; het verschaft niettemin een zeer behoorlijk beeld van de moeilijkheden die aan die uitbreiding verbonden zijn.

U zult met me eens zijn, dat het curieuze van dit boek gelegen is in het feit dat men daarginds dit verheven perspectief nodig acht voor hen, die de kleine kindertjes gaan leren rekenen. Kom daar bij ons eens om . . .

v. Tooren

E. Maxwell, *A Gateway to abstract mathematics*, Cambridge, Un. Press., 1965, 136 blz., 16/–.

Een alleraardigst boekje, dat ik zonder meer in elke leerlingenbibliotheek zou willen opnemen. Zonder hulp kan elke geinteresseerde leerling dit boekje doorwerken. Op zeer natuurlijke wijze, ziet de schrijver kans, veel traditionele „vanzelfsprekendheden" omver te kegelen.

Het boekje begint a.h.w. met het spel „Digital Arithmetic" d.w.z. rekenen met de restklassen mod. 10. Al spoedig blijkt, dat er nu vele „vreemde" consequenties aan vastzitten.

Uit $ab = 0$ volgt niet noodzakelijk, dat $a = 0$ of $b = 0$, $(x-1)(x-2) = 0$ heeft vier wortels, $5x^2 + 5x = 0$ is een identieke vergelijking en omdat ook $x^5 = x$ een

identieke vergelijking is, hoeven we ons geen zorgen te maken over polynomen van hogere graad dan vier. Pogingen om breuken of worteltrekkingen te definiëren lopen op mislukkingen uit.

Daarna worden de deelverzamelingen (1, 3, 7, 9) en (2, 4, 6, 8) bestudeerd en m.b.v. deze twee de eerste beginselen van de groepentheorie besproken. Dat in de tweede verzameling 6 als neutraal element fungeert ontlokt de schrijver en mogelijk de leerling „an excellent example to warn us not to be let astray by notation or preconcieved ideas".

Ook de meetkundige toepassingen van een abstractc hoekdefinitie zijn de moeite waard. Warm aanbevolen.

Burgers

WIMECOS

Van geen der leden is commentaar op het schriftelijk eindexamen wiskunde voor gymnasium en hbs bij de secretaris binnengekomen.

Namens het bestuur,
A. Maassen

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

155. Op een schaakbord wordt door twee spelers A en B om beurten een stokje gelegd op een zijde van een veld. A begint.

a. Degene, die het eerst een stokje zo legt, dat een veld aan vier zijden door stokjes wordt omsloten, verliest. Wat is de ideale speelwijze en wie wint dan?

b. Degene, die het eerst een stokje zo legt, dat een veld aan vier zijden door stokjes wordt omsloten, wint. Wat is de ideale speelwijze en wie wint dan?

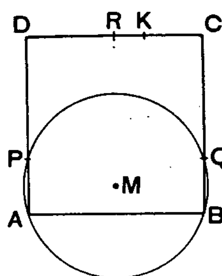
156. In dit nummer vindt men een artikel over „Recreatie en rekenmachines". Er is daar een voorbeeld gegeven van een rechthoek, die in 9 vierkanten verdeeld kon worden zo, dat aan twee daar genoemde voorwaarden voldaan is. Spoor nu alle rechthoeken op, die in 9 vierkanten verdeeld kunnen worden zo, dat aan de beide gestelde voorwaarden voldaan is.

Bewijs, dat een verdeling van een rechthoek in minder dan 9 vierkanten onder deze twee voorwaarden niet mogelijk is

OPLOSSINGEN

153. Een vierkant (zijden 16) moet overdekt worden door drie cirkels met gelijke en minimale straal. Dan zullen deze cirkels door de vier hoekpunten moeten gaan. Een van hen zal dus door twee hoekpunten moeten gaan. Deze cirkel is in de figuur getekend. De beide andere cirkels zullen nu door C, D, P, en Q moeten gaan. En dus de een door P en D en de ander door Q en C. Ligt K binnen of op de eerste van deze twee cirkels, dan is de middellijn hiervan minstens KP; ligt K binnen of op de tweede, dan is de middellijn van de tweede minstens KQ. Hieruit volgt, dat het minimum bereikt wordt, als de beide cirkels elkaar snijden in het midden R van CD.

De rest is eenvoudig. $PR = PB$ en dus is M het snijpunt van de middelloodlijnen van AB en BR. Dit levert voor de straal $\sqrt{65}$.



154. Vijf personen doen mee in een atletiekkamp. Elk paar bestrijdt elkaar hetzij in kogelstoten, hetzij in discuswerpen, hetzij in speerwerpen, hetzij in hoogspringen, hetzij in verspringen. Niemand bestrijdt twee anderen in dezelfde tak van sport. Op hoeveel principieel verschillende manieren is dit mogelijk? We noemen twee manieren principieel verschillend, als ze niet door een permutatie van de takken van de sport in elkaar overgevoerd kunnen worden.

Het probleem komt erop neer, dat we in een vierkant diagram met 25 velden de letters k, d, s, h, v zo moeten invullen, dat in elke rij de vijf verschillende letters voorkomen, terwijl bovendien gezorgd moet worden voor symmetrie t.o.v. de hoofddiagonaal.

We nummeren de velden 1 tot en met 25 in de volgorde, waarin men normaal leest. Plaats in de velden 1-5 resp. k, d, s, h, v en vul de velden 6, 11, 16, 21 overeenkomstig. Onderstel nu, dat op een van 1 verschillend veld van de hoofddiagonaal ook k komt. Zonder de algemeenheid te schaden, mogen we aannemen, dat dit geschiedt op veld 7. Op de velden 8, 9, 10 komt dan resp. h, v, s, of resp. v, s, h. Door een permutatie van h, v en s gaan deze gevallen in elkaar over. We mogen dus aannemen, dat resp. h, v, s ingevuld wordt. Men kan nu in veld 14 plaatsen k of d. In het linker diagram is aangegeven, wat men dan verder verplicht is in te vullen. Het blijkt nu onmogelijk veld 20 op passende wijze te vullen. Dus kan op de hoofddiagonaal geen twee keer k voorkomen. (En evenmin kan een andere letter tweemaal op de hoofddiagonaal voorkomen.)

Op de hoofddiagonaal komt dus de letter s voor en door permutatie kan men gedaan krijgen, dat deze op veld 7 komt. Men kan dan in de velden 8, 9, 10 invullen resp. k, v, h. Op veld 14 komt d en bij veld 15 loopt men vast (middelste diagram).

Men kan voorts op de velden 8, 9, 10 invullen resp. h, v, k (of v, k, h, hetgeen echter niet principieel iets anders is). Men is dan verplicht de overige velden conform het rechter diagram te vullen.

Er is dus slechts één methode (vgl. de groep met vijf elementen).

k	d	s	h	v
d	k	h	v	s
s	h		k/d	d/k
h	v	k/d		
v	s	d/k		

k	d	s	h	v
d	s	k	v	h
s	k		d	
h	v			
v	h			

k	d	s	h	v
d	s	h	v	k
s	h	v	k	d
h	v	k	d	s
v	k	d	s	h